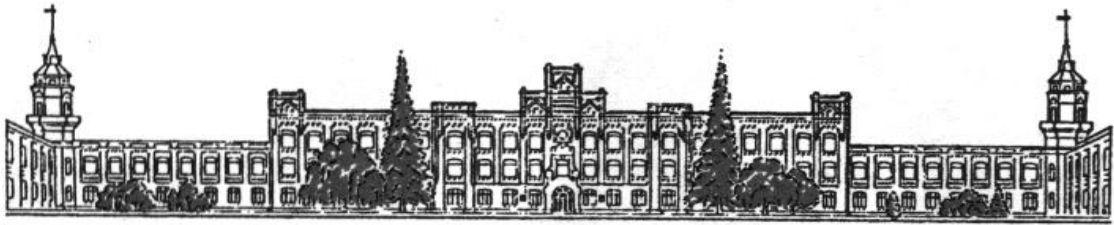


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



ВИЩА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ

ЗМІННОЇ

Практикум

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за технічними спеціальностями*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Вища математика : Теорія функції комплексної змінної : Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. : Є.В. Массалітіна., О.О. Кільчинський. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,457 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 35 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету (протокол № 3 від 26.03.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Практикум

Укладачі: *Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук*
Кільчинський Олександр Олександрович, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор: *Дудкін Микола Євгенович, доктор фіз.-мат. наук, проф.*

Рецензент: *Ординська Зоя Павлівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.*

Практикум з розділу «Теорія функції комплексної змінної» дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей містить 30 варіантів, кожен варіант складається з 12 завдань (26 задач).

Самостійне виконання цих завдань забезпечує свідоме оволодіння навчальним матеріалом, який передбачено навчальною програмою з вищої математики технічних спеціальностей.

Практикум може бути рекомендований у якості розрахункової роботи з теми «Теорія функції комплексної змінної».

ВСТУП

Практикум з розділу «Теорія функції комплексної змінної» дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей містить систематизовану добірку задач з відповідного розділу вищої математики, без якого неможлива підготовка сучасного інженера.

Теорія функції комплексної змінної широко застосовується в прикладній математиці, фізиці, електротехніці та інших галузях техніки.

Практикум містить 30 варіантів, кожен варіант складається з 12 завдань (26 задач).

Даний практикум допоможе студентам опрацювати тему «Теорія функції комплексної змінної», виробити уміння та навички розв'язання основних задач. Це, в свою чергу, забезпечить успішне засвоєння матеріалу, передбаченого навчальною програмою з вищої математики технічних спеціальностей НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського».

Практикум може бути рекомендований для використання викладачами вищої математики у якості завдань до розрахункової роботи з теми «Теорія функції комплексної змінної».

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №1

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $z_1 = 6 + 6i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{33} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(3 - 5i) + 51i + 14 = 0$; б) $z^3 + 3z^2 + 4z + 2 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{\frac{1}{32} + \frac{i\sqrt{3}}{32}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - 1| \geq 2$, $|z + 1| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3i\right)$; б) i^{1+i} ; в) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3} + 8i}{7}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z \operatorname{Re} z^2$, б) $w(z) = \cos(iz - 1)$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x$, $f(0) = 0$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L z \operatorname{Re} z^2 dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; б) $\int_{ABC} (\cos z + \operatorname{sh} iz) dz$, ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = -1$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = -1 - 3i$; б) $\frac{z + 2}{z + z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$; в) $ze^{\frac{1}{z-2}}$, $z_0 = 2$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\cos \frac{\pi}{2} z dz}{(z-1)(z+3)^2}$, де

а) $L_1 : |z - 3 - 3i| = 1$; б) $L_2 : |z + 3| = \frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z - 1| = \frac{1}{2}$; г) $L_4 : |z| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{8 - 2\sqrt{15} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + 2 \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 2) dx}{x^4 + 5x^2 + 10}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x dx}{x^2 - 4x + 5}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №2

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -1 + i$, $z_1 = 4 + 4i$, $z_1 = 4 + 4i$, $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^6$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{19} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(3 + 4i) + 9i + 7 = 0$; б) $z^3 - 7z^2 + 24z - 18 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-256}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - i| > 1$, $|z| \leq 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - i\right)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$; в) $\operatorname{Arccos}(-3i)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z \operatorname{Im} z^2$, б) $w(z) = \sin(iz + 1)$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2$, $f(0) = 2 + i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L (4z + \bar{z}) dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; б) $\int_L (z + 1)e^z dz$ ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = -1 + i$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{4(z-2)}{(z-3)(z+1)}$, $z_0 = -1 - 2i$; б) $\frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$, $z_0 = 0$; в) $\sin \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0 = 2$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{e^{z^2}-1}{(z^3-iz^2)(z+1)} dz$, де

а) $L_1 : |z - 4 + 2i| = 1$; б) $L_2 : |z + 1| = \frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z - i| = \frac{1}{3}$; г) $L_4 : |z - 1 - i| = 3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{6 + 4\sqrt{2} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin x dx}{x^4 + 9x^2 + 20}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №3

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\frac{1}{3} - i\frac{1}{3}$, $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}$; i^{13} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(1 + 7i) - 9i - 12 = 0$; б) $z^3 - 5z^2 + 2z + 78 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{128 + i128\sqrt{3}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + i| \leq 2$, $\operatorname{Re} z < -1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

1. а) $\operatorname{sh}\left(1 + \frac{i\pi}{2}\right)$; б) $(-1 - i)^{4i}$; в) $\operatorname{Arcth}\left(\frac{8 + i3\sqrt{3}}{7}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z^2 \operatorname{Re} z$, б) $w(z) = z e^z$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$, $f(0) = i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L \operatorname{Re} z \, dz$, $L = \{(x, y) : y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$; б) $\int_{ABC} (z^3 + \cos z) \, dz$, ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = -1$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = 2 + i$; б) $\frac{5z + 50}{25z + 5z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$; в) $e^{\frac{z}{z-2i}}$, $z_0 = 2i$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\operatorname{ch} \pi z \, dz}{(z^2 + 4)(z - 1)^2}$, де

а) $L_1 : |z + 4| = 1$; б) $L_2 : |z + 2i| = \frac{1}{3}$; в) $L_3 : |z - 1| = \frac{1}{4}$; г) $L_4 : |z - 1 - i| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 + 2\sqrt{3} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(6 + \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 25)^2}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 e^{ix} dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №4

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{23} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 + z(2 - i) + 11i - 13 = 0$; б) $z^3 + 5z^2 + 20z + 16 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-81}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + 2| > 2$, $|z - 2i| \leq 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{ch}\left(2 + \frac{i\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1-i}$; в) $\operatorname{Arsh}(-4i)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z^2 \operatorname{Im} z$, б) $w(z) = z e^{-z}$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = (e^x + e^{-x}) \sin y$, $f(0) = i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz$, $L = \{z : \operatorname{Re} z = 1, |\operatorname{Im} z| \leq 4\}$; б) $\int_{ABC} (4z^3 - 3z^2) dz$, ABC – ламана, $z_A = 1$, $z_B = 0$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1 + 2i$; б) $\frac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$, $z_0 = 0$; в) $\cos \frac{3z}{z-i}$, $z_0 = i$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\operatorname{sh} 3z dz}{z^2(z+1)(z-2)}$, де

а) $L_1: |z + 2 + 2i| = 1$; б) $L_2: |z + 1| = \frac{1}{4}$; в) $L_3: |z| = \frac{1}{2}$; г) $L_4: |z - 2| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \sqrt{5} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 9)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3) \cos x dx}{x^2 - 6x + 109}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №5

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -1 - i$, $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{14}$; i^{43} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(5 - 3i) + 3i + 10 = 0$; б) $z^3 + 4z^2 + 6z + 4 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + 1| \leq 1$, $|z + i| \leq 1$, $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2i\right)$; б) $(1 - i\sqrt{3})^{6i}$; в) $\operatorname{Arth}\left(\frac{3 + i2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z^2 |z|$, б) $w(z) = \sin(z - i)$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 3x$, $f(0) = i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L \bar{z} |z| dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; б) $\int_{ABC} z^3 e^{z^4} dz$, де ABC – ламана, $z_A = i$, $z_B = -1$, $z_C = 0$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{4(z+2)}{(z+3)(z-1)}$, $z_0 = -2 + 2i$; б) $\frac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$, $z_0 = 0$; в) $ze^{\frac{\pi}{(z-1)^2}}$, $z_0 = 1$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{e^{2z}}{z^4 + 4z^2} dz$, де

а) $L_1 : |z - 4 + 4i| = 2$; б) $L_2 : |z - 2i| = \frac{1}{2}$; в) $L_3 : |z| = \frac{1}{4}$; г) $L_4 : |z + 2i| = 5$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{9 + 4\sqrt{5} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{3} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 4) dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 2x + 10}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №6

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -1 + i$, $z_1 = -4 - 4i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^6$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{31} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 + z(1 - 4i) + i + 1 = 0$; б) $z^3 - 6z^2 + 16z - 16 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-625}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + i| < 2$, $|z - i| \geq 2$, $\operatorname{Im} z \geq -1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; в) $\operatorname{Arcsin} 4$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z |z|$, б) $w(z) = \cos(z + i)$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$, $f(0) = 0$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L (6z^2 + z \cdot \bar{z}) dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; б) $\int_{ABC} (\sin z + \sin iz) dz$, де ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = 2 + i$; б) $\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$, $z_0 = 0$; в) $(z-3)\cos \pi \frac{z-3}{z}$, $z_0 = 0$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\sin 3z dz}{z(z-1)^2(z+i)}$, де

а) $L_1: |z - 4i| = 3$; б) $L_2: |z| = \frac{1}{3}$; в) $L_3: |z - 1| = \frac{1}{3}$; г) $L_4: |z + i| = 3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 16)^3}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix} dx}{x^2 + 4x + 20}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №7

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $z_1 = -8 - 8i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{14}$; i^{17} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(5 + 3i) + 10i + 10 = 0$; б) $z^3 + 5z^2 + 15z + 18 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + 1 + i| < 1$, $\operatorname{Im} z > 1$, $\operatorname{Re} z > -1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{sh}\left(2 + \frac{i\pi}{4}\right)$; б) $(-1 + i\sqrt{3})^{3i}$; в) $\operatorname{Arcctg}\left(\frac{4 + 3i}{5}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z^3 |z|$, б) $w(z) = e^{-3z}$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = 3x^3 - 9xy^2 + 4xy$, $f(0) = 0$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_{AB} z e^{|z|^2} dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$; б) $\int_{AB} (6z^5 + 4z^3 + 1) dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 1$, $z_B = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0 = 1 + 3i$; б) $\frac{5z-50}{2z^3+5z^2-26z}$, $z_0 = 0$; в) $e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}$, $z_0 = 1$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{z}{(z^4-1)(z-i)} dz$, де

а) $L_1: |z + 4 - 4i| = 2$; б) $L_2: |z + 1| = \frac{1}{3}$; в) $L_3: |z - i| = \frac{1}{4}$; г) $L_4: |z| = 3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 25)^2 (x^2 + 9)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos 3x dx}{x^2 - 2x + 5}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №8

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -4 + 4i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$, в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^6$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{53} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(5 - i) - i + 4 = 0$; б) $z^3 - 4z^2 + 4z - 3 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-\frac{1}{256}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - 1 + i| \geq 1$, $\operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Im} z < -1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + i\right)$; б) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$; в) $\operatorname{Arch}(-2)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = |z + 1| \operatorname{Re} z$, б) $w(z) = \operatorname{ch}(iz - 2)$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = 2(2 \operatorname{sh} x \sin y + xy)$, $f(0) = 4$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L (z + 1) \operatorname{Re} z^2 dz$, $L = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; б) $\int_{AB} (z^2 - z + 4) dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 1$, $z_B = 1 + i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{2z}{z^2 - 4}$, $z_0 = -1 + 3i$; б) $\frac{3z - 36}{z^4 + 3z^3 - 18z^2}$, $z_0 = 0$; в) $\sin \frac{2z - 2}{z + 2}$, $z_0 = -2$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\operatorname{ch} 2z dz}{z^2(z + 1)(z - 2)}$, де

а) $L_1 : |z + 4 - 4i| = 2$; б) $L_2 : |z + 1| = \frac{1}{2}$; в) $L_3 : |z| = \frac{1}{3}$; г) $L_4 : |z - 2| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 2\sqrt{3} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + \sqrt{5} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 16)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №9

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^6$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{37} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 ,

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(3 + 2i) - i + 5 = 0$; б) $z^3 + 5z^2 + 8z + 6 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-\frac{1}{32} - \frac{i\sqrt{3}}{32}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - 2 - 2i| \leq 2$, $\operatorname{Re} z < 3$, $\operatorname{Im} z < 2$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$; б) $(-1 + i)^{3i}$; в) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3} + 3i}{3}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = |z + 1| \operatorname{Im} z$, б) $w(z) = \operatorname{sh}(iz + 2)$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$, $f(0) = i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L (z + 2\bar{z}) dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; б) $\int_{ABC} z e^{z^2} dz$, де ABC – ламана, $z_A = -i$, $z_B = 1$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{4(z-2)}{(z-3)(z+1)}$, $z_0 = 3 + i$; б) $\frac{7z-98}{2z^3 + 7z^2 - 49z}$, $z_0 = 0$; в) $z e^{\frac{z}{z-5}}$, $z_0 = 5$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\cos z}{z^2(z^2 + 4)} dz$, де

а) $L_1 : |z + 4 - 4i| = 2$; б) $L_2 : |z + 2i| = \frac{1}{2}$; в) $L_3 : |z| = \frac{1}{4}$; г) $L_4 : |z - 2i| = 5$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{6 - 4\sqrt{2} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{2} + \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2(x^2 + 4)}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 e^{ix} dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №10

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $z_1 = 6 - 6i$, $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^6$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12}$; i^{51} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(4 + i) + 5i + 5 = 0$; б) $z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{8 - i8\sqrt{3}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + 1 + i| \geq 1$, $-2 < \operatorname{Re} z < 0$, $-2 \leq \operatorname{Im} z \leq 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{sh}\left(3 + \frac{i\pi}{6}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^i$; в) $\operatorname{Arch}(3i)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$, б) $w(z) = \operatorname{ch}(z - i)$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - y$, $f(0) = 0$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz$, де $L = \{z : |z| = 2, \operatorname{Re} z \geq 0\}$; б) $\int_{ABC} (4z + i) dz$, де ABC – ламана, $z_A = 1 - i$, $z_B = 0$, $z_C = 1 + i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = -3 + 2i$; б) $\frac{2z - 16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2}$, $z_0 = 0$; в) $z \cos \frac{1}{z - 2}$, $z_0 = 2$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z dz}{z(z - 3)^2(z + 1)}$, де

а) $L_1 : |z - 3 - 3i| = 1$; б) $L_2 : |z| = \frac{1}{3}$; в) $L_3 : |z - 3| = \frac{1}{4}$; г) $L_4 : |z + 1| = 5$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + 2\sqrt{2} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 5) dx}{x^4 + 17x^2 + 16}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 2x dx}{x^2 - 2x + 10}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №11

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = 3 - 3i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{14}$; i^{31} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 + z(2 - i) + 8i - 6 = 0$; б) $z^3 + z^2 - z + 2 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-128 + i128\sqrt{3}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + i| \leq 2$, $|z| < 1$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{ch}\left(2 - \frac{i\pi}{6}\right)$; б) $(-1 + i\sqrt{3})^{-3i}$; в) $\operatorname{Arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3} + 2i}{7}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = |z| \operatorname{Im} \bar{z}$, б) $w(z) = \operatorname{sh}(z + i)$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x$, $f(0) = 0$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Re} z \, dz$, де AB – відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$; б) $\int_L (z - 3)e^z \, dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = 1 - 2i$; б) $\frac{3z + 18}{9z + 3z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$; в) $ze^{\frac{\pi z}{z - \pi}}$, $z_0 = \pi$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\cos \frac{\pi}{2} z \, dz}{(z + 3)(z - 2)^2}$, де

а) $L_1 : |z + 3 + 3i| = 1$; б) $L_2 : |z + 3| = \frac{1}{2}$; в) $L_3 : |z - 2| = 1$; г) $L_4 : |z + 1| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{8 + 3\sqrt{7} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + \sqrt{7} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 25)^3}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - 3) \sin x \, dx}{x^2 - 6x + 109}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №12

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\sqrt{3} + i$, $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -2\sqrt{3} - 2$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^6$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{37} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(1 + 2i) + 7i + 1 = 0$; б) $z^3 - 2z^2 + 16 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - 2i| \leq 2$, $|z - 2i| < 1$, $\text{Im } z > 2$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3i\right)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$; в) $\text{Arccos}(-5)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = \bar{z} \text{Re } z$, б) $w(z) = i z^2 - 4z$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \text{Re } f(z)$ (уявною $v(x, y) = \text{Im } f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L |z| \bar{z} dz$, де $L = \{z : |z| = 2, \text{Re } z \geq 0\}$; б) $\int_{ABC} (z^3 + \sin iz) dz$, де ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = -1$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = 3-i$; б) $\frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$, $z_0 = 0$; в) $z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}$, $z_0 = 0$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-2i)(z^2+4)} dz$, де

а) $L_1 : |z-4|=2$; б) $L_2 : |z|=\frac{1}{3}$; в) $L_3 : |z-2i|=\frac{1}{4}$; г) $L_4 : |z|=3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 + \sqrt{7} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \sqrt{3} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+25)(x^2+4)^2}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{(x-1)e^{2ix} dx}{x^2-4x+5}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №13

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = \sqrt{3} + i$, $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{47} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 ,

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(4 + 3i) + i + 7 = 0$; б) $z^3 - z^2 - 4z - 6 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - i| < 1$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$, $\operatorname{Re} z \leq 2$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2i\right)$; б) i^{1-i} ; в) $\operatorname{Arcth}\left(\frac{3-4i}{5}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$, б) $w(z) = i z^2 + 3z$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L (\bar{z} + 2z) dz$, де $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$; б) $\int_L (z-1)e^z dz$, де ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = 1+i$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{4(z+2)}{(z+3)(z-1)}$, $z_0 = 1-3i$; б) $\frac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$, $z_0 = 0$; в) $z e^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0 = 4$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\operatorname{ch} \pi z dz}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}$, де

а) $L_1 : |z - 2 - 2i| = 1$; б) $L_2 : |z + i| = \frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z + 1| = \frac{1}{2}$; г) $L_4 : |z| = 3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + 2 \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 \cos x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №14

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $z_1 = 6 + 6i$, $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^6$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{35} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(7 - i) - 5i + 14 = 0$; б) $z^3 + 2z^2 - 2z + 3 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-\frac{1}{625}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + i| > 1$, $|z + 2i| < 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{3} - 2i\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{1-i}$; в) $\operatorname{Arccos} i$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z^2 \bar{z}$, б) $w(z) = z^3 - 3iz$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = 2e^x \sin y$, $f(0) = -2i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L \operatorname{Im}(z^2 + z) dz$, де $L = \{(x, y) : y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}$; б) $\int_L (\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} iz) dz$, де $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 2 - 3i$; б) $\frac{4z-64}{z^4 + 4z^3 - 32z^2}$, $z_0 = 0$; в) $z \cos \frac{3z}{z-1}$, $z_0 = 1$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\operatorname{sh} 4z dz}{z^2(z^2 + z - 2)}$, де

а) $L_1 : |z - 3 - 3i| = 1$; б) $L_2 : |z - 1| = \frac{1}{2}$; в) $L_3 : |z| = \frac{1}{4}$; г) $L_4 : |z + 2| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2\sqrt{2} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)^2}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin 2x dx}{x^2 - 2x + 10}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №15

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\sqrt{3} - i$, $z_1 = 7 - 7i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}$; i^{50} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 ,

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(3 - 5i) + 51i + 14 = 0$; б) $z^3 - 3z^2 + 4z + 8 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - 1 - i| < 1$, $|z - 1 - i| < 2$, $\operatorname{Im} z \geq 1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{ch}\left(1 + \frac{i\pi}{3}\right)$; б) $(-1 - i)^{4i}$; в) $\operatorname{Arth}\left(\frac{3 + i2\sqrt{3}}{7}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z^3 \bar{z}$, б) $w(z) = z^3 + iz$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = y^3 - 3x - 3x^2y$, $f(0) = i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$; б) $\int_L (z + 2)e^z dz$, $L = \{z : |z| = 2, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = 2 + 3i$; б) $\frac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z}$, $z_0 = 0$; в) $ze^{\frac{\pi}{(z-2)^2}}$, $z_0 = 2$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{e^{4z}}{z^4 + z^2} dz$, де

а) $L_1 : |z - 4 - 3i| = 2$; б) $L_2 : |z - i| = \frac{1}{2}$; в) $L_3 : |z| = \frac{1}{3}$; г) $L_4 : |z + i| = 3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35} \sin t - 6}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) dx}{x^4 + 26x^2 + 25}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{ix} dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №16

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_1 = -5 + 5i$, $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^6$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{16}$; i^{27} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 ,

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(5 + 4i) + 10i + 2 = 0$; б) $z^3 + z^2 + 3z - 18 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z| < 2$, $|z - i| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{1+i}$; в) $\operatorname{Arch}(3i)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = (z+1)\operatorname{Re} z^2$, б) $w(z) = 2z^2 - iz$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = 2(2 \operatorname{sh} x \sin y + xy)$, $f(0) = i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_{AB} \bar{z} e^z dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 1$, $z_B = i$; б) $\int_L (\sin iz + z) dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{4(z-2)}{(z-3)(z+1)}$, $z_0 = 2 - 2i$; б) $\frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$, $z_0 = 0$; в) $z \sin \frac{z^2-2z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\sin 2z dz}{z(z-2)(z+i)^2}$, де

а) $L_1 : |z-5i|=3$; б) $L_2 : |z|= \frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z+i|= \frac{1}{4}$; г) $L_4 : |z-2|=4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sqrt{3} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + 3 \cos t)^2}$

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^3}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2+2x+10}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №17

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = 1 - i$, $z_1 = -4 - 4i$, $z_2 = 3 - \sqrt[3]{i}$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^{18}$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^8$; i^{39} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(7 + i) + 5i + 14 = 0$; б) $z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z| \leq 2$, $|z + i| < 1$, $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3i\right)$; б) $(1 - i\sqrt{3})^{2i}$; в) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3} - 8i}{7}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = (z + 1)\operatorname{Im} z^2$, б) $w(z) = 4z^2 + i z$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2y - 1$, $f(0) = -1$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz$, $L = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; б) $\int_{ABC} z \sin z dz$, ABC – ламана, $z_A = 1$, $z_B = 0$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 + i$; б) $\frac{3z - 18}{2z^3 + 3z^2 - 9z}$, $z_0 = 0$; в) $z e^{\frac{z}{z - 4i}}$, $z_0 = 4i$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{4z}{(z^4 - 16)(z - 2i)} dz$, де

а) $L_1 : |z + 5 + 5i| = 1$; б) $L_2 : |z + 2| = \frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z - 2i| = \frac{1}{3}$; г) $L_4 : |z| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 2\sqrt{6} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + 2 \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 25)^2 (x^2 + 1)}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 \sin x dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №18

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_1 = 7 + 7i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^{10}$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^8$; i^{38} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(1-i) - 11i + 10 = 0$; б) $z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{81}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $1 < |z-1| < 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$, $\operatorname{Re} z \leq 1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{sh}\left(1 - \frac{i\pi}{3}\right)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; в) $\operatorname{Arch}(-2)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = (z+1)^2 \operatorname{Re} z$, б) $w(z) = \cos 2z - i$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$, $f(0) = i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L (2\bar{z} + z) dz$, $L = \{z : |z|=1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$; б) $\int_L (3z^2 + 2z) dz$, $L = \{(x, y) : y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0 = 2-i$; б) $\frac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$, $z_0 = 0$; в) $z \cos \pi \frac{z+3}{z-1}$, $z_0 = 1$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\operatorname{ch} z dz}{z^2(z-1)(z+2)}$, де

а) $L_1 : |z-4-3i|=1$; б) $L_2 : |z-1|=\frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z|=\frac{1}{2}$; г) $L_4 : |z+2|=5$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{ix} dx}{x^4+9x^2+20}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №19

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = 2 - 2i$, $z_1 = -7 + 7i$, $z_2 = -2\sqrt{3} - 2$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{16}$; i^{41} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(4 - 3i) - 8i - 2 = 0$; б) $z^3 + 2z^2 + 8z - 32 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $1 \leq |z + i| < 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{ch}\left(2 + \frac{\pi i}{2}\right)$; б) $(-1 - i)^{4i}$; в) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3} + 3i}{7}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = (z + 1)^2 \operatorname{Im} z$, б) $w(z) = \sin 3z + i$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = (e^x + e^{-x}) \cos y$, $f(0) = 2$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L |z| \operatorname{Im} z^2 dz$, де $L = \{z: |z| = 9, \operatorname{Re} z \geq 0\}$; б) $\int_{ABC} z^2 e^{z^3} dz$, де ABC – ламана, $z_A = i$, $z_B = 1$, $z_C = 0$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z + 3}{z^2 - 1}$, $z_0 = -2 + 3i$; б) $\frac{11z - 242}{2z^3 + 11z^2 - 121z}$, $z_0 = 0$; в) $ze^{\frac{\pi}{(z-4)^2}}$, $z_0 = 4$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\cos 2z}{z^2(z^2 + 9)} dz$, де

а) $L_1: |z + 4| = 2$; б) $L_2: |z + 3i| = \frac{1}{3}$; в) $L_3: |z| = \frac{1}{2}$; г) $L_4: |z - 1 - i| = 6$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 3\sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{10} + 3\cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли:

а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos x dx}{x^2 + 4x + 20}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №20

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = -5 - 5i$, $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{39} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(1 + 3i) + 5i - 14 = 0$; б) $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{625}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $1 \leq |z - 1| \leq 2$, $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Re} z > 1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + i\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$; в) $\operatorname{Arcsin} i$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = (z^2 - 1)\operatorname{Re} z$, б) $w(z) = e^{5z}$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = e^{-y} \sin x + y$, $f(0) = 1$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_{ABC} |z| dz$, ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$, $z_C = -1 + i$; б) $\int_L (\sin iz + 9z^2) dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{4(z+2)}{(z+3)(z-1)}$, $z_0 = -3 - i$; б) $\frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$, $z_0 = 0$; в) $z \sin \pi \frac{z-1}{z-2}$, $z_0 = 2$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z dz}{z(z+3)(z-1)^2}$, де

а) $L_1 : |z + 5 + 5i| = 2$; б) $L_2 : |z| = \frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z - 1| = \frac{1}{2}$; г) $L_4 : |z + 3| = 6$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sqrt{3} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1) dx}{x^4 + 13x^2 + 36}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №21

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = 2 + 2i$, $z_1 = -5 + 5i$, $z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}$; i^{35} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 ,

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(5 + 2i) - 13i + 7 = 0$; б) $z^3 + z^2 - 2 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{\frac{1}{32} - \frac{i\sqrt{3}}{32}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + 1| > 1$, $-1 < \operatorname{Im} z \leq 1$, $-1 < \operatorname{Re} z < 2$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right)$; б) $(-1 - i\sqrt{3})^{3i}$; в) $\operatorname{Arcth}\left(\frac{3 - i2\sqrt{3}}{7}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = (z^2 - 1)\operatorname{Im} z$, б) $w(z) = ie^{4z}$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = e^{-y} \cos x$, $f(0) = 1$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L \operatorname{Re}(z^2 + z) dz$, $L = \{(x, y) : y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}$; б) $\int_{ABC} (\operatorname{sh} iz + \sin iz) dz$, ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = -1$, $z_C = -i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0 = -1 - 2i$; б) $\frac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$, $z_0 = 0$; в) $ze^{\frac{z}{z-i}}$, $z_0 = i$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\cos \frac{\pi}{2} z dz}{(z-2)^2(z+1)}$, де

а) $L_1 : |z - 2 + 2i| = 1$; б) $L_2 : |z - 1| = \frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z - 2| = \frac{1}{2}$; г) $L_4 : |z| = 3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{15} \sin t - 4}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{ix} dx}{x^2 - 6x + 109}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №22

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = 1 - i$, $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{27} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 ,

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(5 + i) + i + 8 = 0$; б) $z^3 + 6z^2 + 18z + 27 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{16}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + i| > 1$, $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 0$, $\operatorname{Re} z > -3$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{sh}\left(2 - \frac{i\pi}{3}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^i$; в) $\operatorname{Arch}(-1)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = |z| \operatorname{Re} z$, б) $w(z) = i e^{-8z}$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$, $f(0) = i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L \bar{z}^2 dz$, $L = \{(x, y) : y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$; б) $\int_{ABC} (\cos iz + \operatorname{ch} iz) dz$, ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = -i$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -3 - 2i$; б) $\frac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$, $z_0 = 0$; в) $z \cos \frac{z}{z+2i}$, $z_0 = -2i$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2(z-i)(z^2+1)} dz$, де

а) $L_1 : |z - 4 - 4i| = 1$; б) $L_2 : |z| = \frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z - i| = \frac{1}{2}$; г) $L_4 : |z + 1 + i| = 3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 2\sqrt{6} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{3} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 9)}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 \cos x dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №23

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = -6 - 6i$, $z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^{12}$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^9$; i^{23} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(7+i) + 2i + 14 = 0$; б) $z^3 + 6z^2 + 24z + 32 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z+i| < 1$, $|z-1+i| < 1$, $\text{Im } z \geq -1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\text{ch}\left(\frac{\pi}{6} - i\right)$; б) $(-\sqrt{3} + i)^{4i}$; в) $\text{Arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = |z| \text{Im } z$, б) $w(z) = i z^3 + 3z$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \text{Re } f(z)$ (уявною $v(x, y) = \text{Im } f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y)$, $f(0) = 0$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L |z| \text{Re } z^2 dz$, $L = \{z : |z| = 4, \text{Im } z \geq 0\}$; б) $\int_{AB} (z^2 + 4z + 1) dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 1$, $z_B = 1 - i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{4(z-2)}{(z-3)(z+1)}$, $z_0 = -2 - i$; б) $\frac{13z - 338}{2z^3 + 12z^2 - 169z}$, $z_0 = 0$; в) $ze^{\frac{\pi}{(z-5)^2}}$, $z_0 = 5$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\text{ch } \pi z dz}{(z^2 + 9)(z - i)^2}$, де

а) $L_1 : |z + 2 + 2i| = 1$; б) $L_2 : |z + 3i| = \frac{1}{3}$; в) $L_3 : |z - i| = \frac{1}{3}$; г) $L_4 : |z| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{7 + 4\sqrt{3} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{3} + \sqrt{11} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 36)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 3x dx}{x^2 - 2x + 5}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №24

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\sqrt{3} + i$, $z_1 = -4 - 4i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{39} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(6 + i) + 3i + 11 = 0$; б) $z^3 + 3z^2 + 12z - 16 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - i| \leq 1$, $|z + 1 - i| \leq 1$, $\operatorname{Im} z \geq 1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + i\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{i+1}$; в) $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z^2$, б) $w(z) = i z^3 - 2z$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = 3x^2 y - y^3$, $f(0) = 1$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L (3z^2 + z \cdot \bar{z}) dz$, $L = \{z: |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; б) $\int_{ABC} (\sin z + z^5) dz$, ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = 2i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = 3 + 2i$; б) $\frac{3z + 36}{18z^2 + 3z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$; в) $\sin \frac{z^2 - 4z}{(z - 2)^2}$, $z_0 = 2$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\operatorname{sh} 4z dz}{z^2(z^2 + 3z + 2)}$, де

а) $L_1: |z - 2 - 2i| = \frac{1}{2}$; б) $L_2: |z + 2| = \frac{1}{3}$; в) $L_3: |z| = \frac{1}{3}$; г) $L_4: |z + 2| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 + \sqrt{15} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{3} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)^2}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x e^{2ix} dx}{x^2 - 2x + 10}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №25

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = 2 - 2i$, $z_1 = -7 + 7i$, $z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}$; i^{38} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - 2z - 6i - 7 = 0$; б) $z^3 + 4z^2 + 12z + 9 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{128 - i128\sqrt{3}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + 1| > 1$, $-4 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $-1 < \operatorname{Im} z < 1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$; б) $(-\sqrt{3} + i)^{6i}$; в) $\operatorname{Arth}\left(\frac{4 - 3i}{5}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z^2$, б) $w(z) = \cos iz + z$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = e^{-y} \cos x + x$, $f(0) = 1$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_{AB} \operatorname{Re} z^3 dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$; б) $\int_L (\cos iz + z) dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{2z}{z^2 - 4}$, $z_0 = 2 + 2i$; б) $\frac{11z + 242}{121z + 11z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$; в) $ze^{\frac{2z}{z-8}}$, $z_0 = 8$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{e^{3z}}{z^2(z^2 + 9)} dz$, де

а) $L_1 : |z - 4 + 5i| = 2$; б) $L_2 : |z - 3i| = \frac{1}{2}$; в) $L_3 : |z| = \frac{1}{4}$; г) $L_4 : |z + 3i| = 7$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{6 + \sqrt{35} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) dx}{x^4 + 20x^2 + 64}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №26

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = 1 - i$, $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^8$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{14}$; i^{39} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(3 + i) + 9i - 2 = 0$; б) $z^3 - 5z^2 + 10z - 12 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{256}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + 1 - i| > 1$, $\operatorname{Re} z < 1$, $\operatorname{Im} z > -1$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{sh}\left(3 + \frac{i\pi}{6}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{i+1}$; в) $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3}$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z^3$, б) $w(z) = \sin i z - z$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $f(1) = 1$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_{AB} 4e^{|z|^2} \operatorname{Re} z \, dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$; б) $\int_L (\operatorname{ch} iz - z) \, dz$, $L = \{z: |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = -2 - 2i$; б) $\frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$, $z_0 = 0$; в) $z \cos \frac{z}{z-5}$, $z_0 = 5$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\sin 4z \, dz}{z(z-i)^2(z+1)}$, де

а) $L_1: |z - 2 - 5i| = 3$; б) $L_2: |z| = \frac{1}{2}$; в) $L_3: |z - i| = \frac{1}{3}$; г) $L_4: |z + 1| = 3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4 \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \sin 2x \, dx}{x^2 - 4x + 5}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №27

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $z_1 = -6 - 6i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^9$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{45} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - 2zi - 5 = 0$; б) $z^3 - 5z^2 + 12z - 18 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{8 + i8\sqrt{3}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + 1 + i| > 1$, $\operatorname{Re} z > -3$, $-2 \leq \operatorname{Im} z \leq 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\operatorname{ch}(1 - i\pi)$; б) $(-1 + i\sqrt{3})^{3i}$; в) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3 + 4i}{5}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z \operatorname{Im} z$, б) $w(z) = \operatorname{sh} i z - z^2$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$, $f(0) = 0$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz$, $L = \{z: \operatorname{Re} z = 1, |\operatorname{Im} z| \leq 10\}$; б) $\int_{AB} (4z^3 - 3z^2) dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 1$, $z_B = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{4(z+2)}{(z+3)(z-1)}$, $z_0 = -2 + i$; б) $\frac{15z + 450}{225z + 15z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$; в) $e^{\frac{z}{z-7}}$, $z_0 = 7$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{9z}{(z^4 - 81)(z - 3i)} dz$, де

а) $L_1: |z - 4 - 5i| = 1$; б) $L_2: |z + 3| = \frac{1}{3}$; в) $L_3: |z - 3i| = \frac{1}{3}$; г) $L_4: |z| = 5$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{8 - 3\sqrt{7} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \sqrt{3} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли:

а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 4)^2}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x e^{ix} dx}{x^2 + 2x + 10}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №28

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_1 = -5 - 5i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^9$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{23} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 ,

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(4 + 3i) + 6i + 2 = 0$; б) $z^3 + 2z^2 + 6z - 9 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - 1 - i| > 1$, $\operatorname{Re} z < 4$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3i\right)$; б) i^{1-i} ; в) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3} - 8i}{7}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = z^3 \operatorname{Re} z$, б) $w(z) = \operatorname{ch} i z + z^2$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = 2e^x \cos y$, $f(0) = 2 + 2i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_{AB} \bar{z}^2 dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$; б) $\int_{ABC} (\operatorname{sh} z + \cos iz) dz$, ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = i$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -2 + i$; б) $\frac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$, $z_0 = 0$; в) $\sin \frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = i$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\operatorname{ch} 4z dz}{z^2(z-1)(z-2)}$, де

а) $L_1: |z+1-4i|=2$; б) $L_2: |z-2|=\frac{1}{4}$; в) $L_3: |z|=\frac{1}{3}$; г) $L_4: |z-1|=3$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7} \sin t}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{5} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 25)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{x^4 + 9x^2 + 20}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №29

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -9 - 9i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^6$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$; i^{26} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - 20z + 6i + 92 = 0$; б) $z^3 - z^2 + 2z + 4 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-\frac{1}{32} + \frac{i\sqrt{3}}{32}}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z - 2 - i| \geq 1$, $1 \leq \operatorname{Re} z < 3$, $0 < \operatorname{Im} z \leq 3$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2i\right)$; б) $(-1 + i)^{-3i}$; в) $\operatorname{Arcth}\left(\frac{4 + 3i}{5}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

$w(z) = z^3 \operatorname{Im} z$, б) $w(z) = (iz - 1)^2$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $u(x, y) = x \cos x \operatorname{ch} y + y \sin x \operatorname{sh} y$, $f(0) = i$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_{AB} z \operatorname{Im} z^2 dz$, AB – відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$; б) $\int_L (z - 1)e^z dz$, $L = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z - 1}{z(z + 1)}$, $z_0 = -2 - 3i$; б) $\frac{7z + 98}{49z + 7z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$; в) $ze^{\frac{\pi}{(z-9)^2}}$, $z_0 = 9$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\cos 4z}{z^2(z^2 + 1)} dz$, де

а) $L_1 : |z - 3 - 3i| = 2$; б) $L_2 : |z + i| = \frac{1}{4}$; в) $L_3 : |z| = \frac{1}{3}$; г) $L_4 : |z + 1 + i| = 4$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3} \sin t - 2}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cos t)^2}$.

Завдання 12. Обчислити невласні інтеграли: а) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}$; б) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

Теорія функції комплексної змінної

Варіант №30

Завдання 1. а) Подати числа $z_0 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ в тригонометричній та показниковій формах.

б) Обчислити: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1 \cdot z_2)^7$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{18}$; i^{47} . Зобразити числа z_0 , z_1 , z_2 ,

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ на комплексній площині.

в) Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{z_0}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 2. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - z(5 + 2i) + 11i + 7 = 0$; б) $z^3 + 4z^2 + 12z + 9 = 0$.

Завдання 3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-625}$ та зобразити їх на комплексній площині.

Завдання 4. Зобразити область, яка задана нерівностями: $|z + 2 + i| \geq 1$, $-3 \leq \operatorname{Re} z \leq -3 < \operatorname{Im} z < 0$.

Завдання 5. Обчислити значення функцій (подати в алгебраїчній формі):

2. а) $\operatorname{sh}\left(5 + \frac{i\pi}{3}\right)$; б) $(1 - i\sqrt{3})^{4i}$; в) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3} + 3i}{3}\right)$.

Завдання 6. Перевірити виконання умов Коші-Рімана. У разі виконання, знайти похідні від функцій:

а) $w(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z^3$, б) $w(z) = (iz + 1)^2$.

Завдання 7. Відновити аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (уявною $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$) частиною, якщо $v(x, y) = y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x$, $f(0) = 1$.

Завдання 8. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по заданій кривій:

а) $\int_L \operatorname{Re} z^3 \operatorname{Im} z^2 dz$, $L = \{(x, y): y = 3x^2, 0 \leq x \leq 1\}$; б) $\int_L (\cos iz + 3z^2) dz$, $L = \{z: |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Завдання 9. Знайти розкладення функції в ряд Лорана в околі точки z_0 :

а) $\frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 - 2i$; б) $\frac{8z - 256}{z^4 + 8z^3 - 128z^2}$, $z_0 = 0$; в) $\cos \frac{z^2 - 4z}{(z - 2)^2}$, $z_0 = 2$.

Завдання 10. Обчислити інтеграл за теоремою Коші про лишки: $\oint_{L_i} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z dz}{(z^2 + 2z - 3)(z^2 - z)}$, де

а) $L_1: |z - 4 + 4i| = 1$; б) $L_2: |z| = \frac{1}{2}$; в) $L_3: |z - 1| = \frac{1}{4}$; г) $L_4: |z + 3| = 6$.

Завдання 11. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6} \sin t - 5}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{13} + 2\sqrt{3} \cos t)^2}$

Завдання 12. Обчислити невластні інтеграли: а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 6) dx}{x^4 + 29x^2 + 100}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 1)e^{3ix} dx}{x^2 - 2x + 5}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Араманович И.П., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968.
2. Грималюк В.П., Кухарчук М.М., Ясінський В.В. Вища математика. Навч. посіб. для студ. вищ. техн.. навч. закл. – К.: Віпол, 2004 – Ч. 2 – 400 с.: іл. 289.
3. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука, 1981.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. 1987.
6. Мартиненко М.А., Юрик І.І. Теорія функції комплексної змінної. – К.: Слово, 2008.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – 10-е изд., и последующие. – М.: Наука.
8. Пчелкин Б.К. Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1973.
9. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1980.
10. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 1999. — 126 с.: ил.
11. Массалітіна Є.В., Кільчинський О.О. Теорія функцій комплексної змінної / Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни „Вища математика” для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання. – К.: НТУУ „КПІ”, 2008. – 54 с.

Зміст

ВСТУП	2
Варіант №1	3
Варіант №2	4
Варіант №3	5
Варіант №4	6
Варіант №5	7
Варіант №6	8
Варіант №7	9
Варіант №8	10
Варіант №9	11
Варіант №10	12
Варіант №11	13
Варіант №12	14
Варіант №13	15
Варіант №14	16
Варіант №15	17
Варіант №16	18
Варіант №17	19
Варіант №18	20
Варіант №19	21
Варіант №20	22
Варіант №21	23
Варіант №22	24
Варіант №23	25
Варіант №24	26
Варіант №25	27
Варіант №26	28
Варіант №27	29
Варіант №28	30
Варіант №29	31
Варіант №30	32
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	33